Circuits linéaires du 1^er^ordre en régime transitoire

Définitions

Définition : Régimes établis
On définit les régimes ***établis*** (aussi appelés ***permanents***)

stationnaire dans lequel les grandeurs électrocinétiques (u, i, q) sont stationnaires,

sinusoïdal établi dans lequel elles varient toutes sinusoïdalement à la ***même pulsation*** ω : $u(t) = U_m \cos \omega t$.

Définition : Régimes transitoire et libre
On nomme ***régime transitoire*** l'évolution d'un système entre deux régimes établis. Pour un dipôle, Il s'agit d'une ***charge*** (resp. ***décharge***) si l'énergie (électrostatique ou magnétique) du dipôle croît (resp. décroît).

On nomme ***régime libre*** l'évolution en l'absence de source d'énergie.

Définition : Ordre d'un circuit
Un circuit linéaire est dit **du p^e^ordre** si ses grandeurs électrocinétiques obéissent à une équation différentielle linéaire du p^e^ordre.

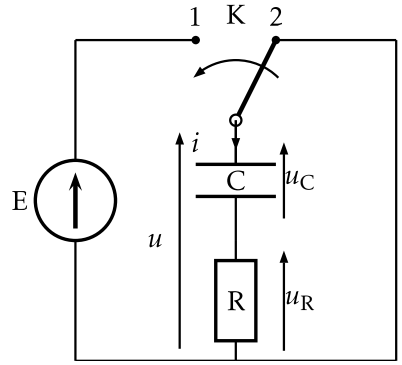
Fonction échelon

Définition : Fonction échelon
On nomme ***échelon*** (fonction de Heaviside) la fonction ***discontinue en*** 0 définie par :

$$t < 0 : H(t) = 0 \qquad t \geqslant 0 : H(t) = 1$$

On appelle ***réponse à un échelon d'une grandeur*** l'évolution temporelle de cette grandeur dans un système soumis à une excitation constante par morceaux et discontinue. La grandeur étudiée est alors solution d'une équation différentielle dont le second membre s'exprime à l'aide de la fonction échelon.

Exemple charge d'un condensateur initialement déchargé



Portraits de phase

Définition : Portraits de phase
On nomme ***espace des phases*** d'une grandeur x qui évolue temporellement le plan d'abscisse x et d'ordonnée $\dot{x}$.

Une courbe $x(t), \dot{x}$ particulière est une ***trajectoire dans l'espace des phases***.

La représentation de différentes trajectoires constitue un ***portrait de phase***.

Propriétés générales

Caractéristiques

- le sens de parcours est déterminé dans chaque quadrant : la trajectoire est parcourue dans le sens horaire
- elle intersecte l'axe $\dot{x} = 0$ orthogonalement (si la dérivée seconde $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2}$ est non nulle à cet instant)

Équation canonique

Équation canonique

Toutes les grandeurs électrocinétiques d'un circuit linéaire du premier ordre obéissent, en régime transitoire vers un état stationnaire, à la même équation dite ***canonique***. On a :

$$\dot{x} + \frac{x}{\tau} = \frac{X_\infty}{\tau},$$

où :

- x est une tension, intensité, charge…
- $\tau > 0$ est la ***constante de temps du circuit***,
- X_∞ est la valeur asymptotique de x en régime stationnaire, déterminée ***en utilisant les modèles asymptotiques des dipôles en régime stationnaire***.
- pour une charge de condensateur : $u_{c\infty} = E$, pour une décharge $u_{c\infty} = 0$.

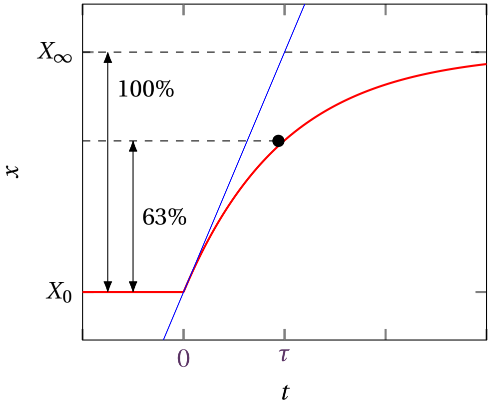
Résolution

Théorème : Solution de l'équation différentielle canonique

L'***unique*** solution de l'équation canonique du premier ordre ***vérifiant*** $x(0) = X_0$ se met sous la forme :

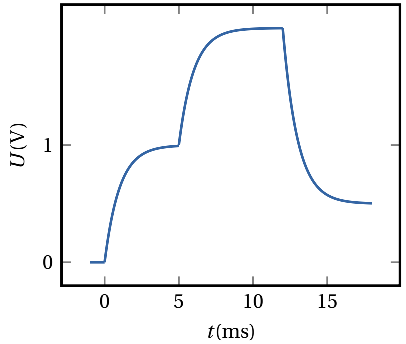
$$x(t) = X_\infty + (X_0 - X_\infty)\, e^{-t/\tau}.$$

Courbe



Exercice

1. Tracer l'allure de la courbe $u_c(t)$ si le condensateur a une capacité $C = 1\,\mu\text{F}$, porte initialement la charge $Q = 5\cdot10^{-6}\,\text{C}$, et qu'on l'alimente avec une alimentation stabilisée avec $E = -2\,\text{V}$, au travers d'une résistance $R = 1\,\text{k}\Omega$.
2. En déduire la valeur de $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}$ à $t = 0$.
3. Sur la courbe ci-contre, distinguer les différents régimes transitoires et établis (ou permanents).

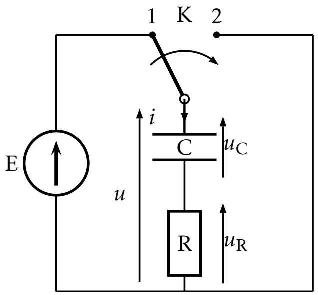


Conditions initiales

Continuité de l'énergie

Les conditions initiales de l'équation différentielle sont déterminées par la ***continuité de l'énergie emmagasinée*** par le dipôle. Dans un ***condensateur***, la charge q et la tension u_C seront toujours continues.

Exercice : Charge et décharge d'un condensateur



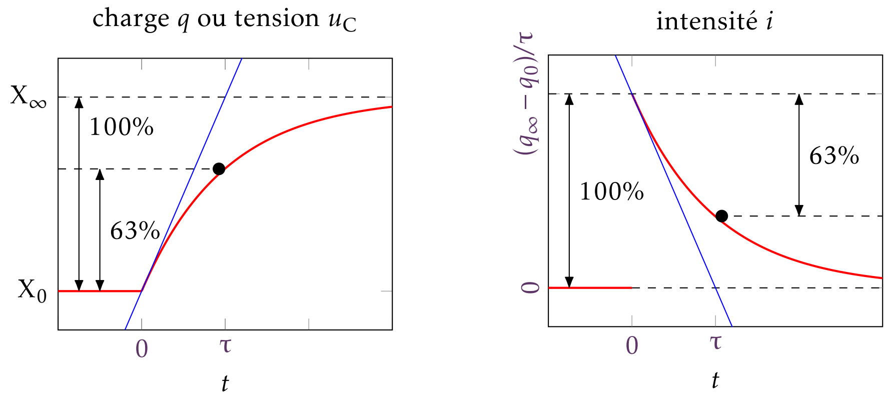
1. Déterminer, en utilisant les modèles asymptotiques des dipôles en régime stationnaire, les valeurs de i, u_R, u_C et de q quand l'interrupteur est en position 1 et quand il est en position 2 depuis longtemps.

2. (a) K est en position 2 depuis un temps long. Il est basculé en 1 à $t=0$. Déterminer $u_C(t), q$ et $i(t)$.
   (b) K est en position 1 depuis un temps long. Il est basculé en 2 à $t=0$. Déterminer $u_C(t)$ et $i(t)$.

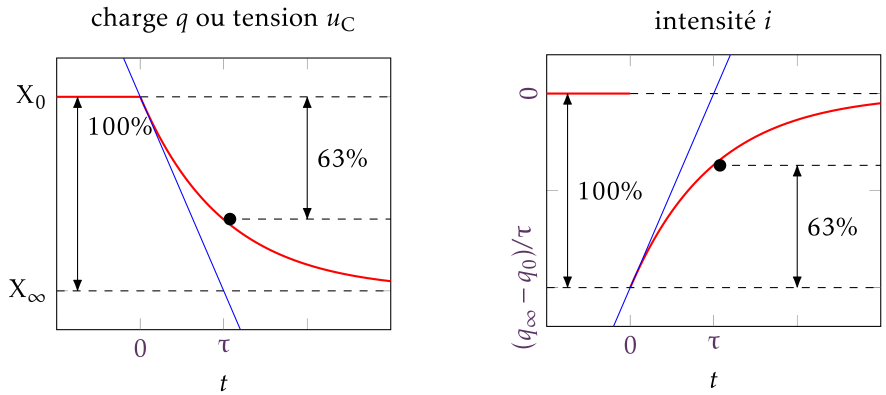
3. On rajoute un résistor de résistance R' en parallèle du condensateur. Le circuit a désormais deux mailles. Déterminer la nouvelle constante de temps du circuit et la nouvelle valeur maximale de u_C et en déduire l'allure de la courbe.

4. Préciser, parmi les grandeurs i, u_C, q, u, lesquelles sont continues.

Courbes générales : charge



Courbes générales : décharge



Décharge

Dissipation de l'énergie
Lors de la décharge d'un dipôle RC série, l'énergie électrostatique initialement stockée est ***entièrement dissipée*** par effet Joule dans le résistor.

Charge

Accumulation d'énergie
Lors de la ***charge***, sous la tension E constante, d'un dipôle série RC de $u_C=0$ à $u_C=E$, le générateur fournit une énergie $\mathscr{E}_{\text{gen}}$ au dipôle qui se répartit pour moitié entre :

- l'énergie électrostatique $\mathscr{E}_{\text{élec}} = \frac{CE^2}{2}$, emmagasinée dans le condensateur,
- l'énergie dissipée par effet Joule dans le résistor $\mathscr{E}_{\text{J}}$.

$$\mathscr{E}_{\text{gen}} = \mathscr{E}_{\text{élec}} + \mathscr{E}_{\text{J}} \quad \mathscr{E}_{\text{J}} = \mathscr{E}_{\text{élec}} = \mathscr{E}_{\text{gen}}/2.$$

Points communs et différences entre le RL et le RC

1. Proposer un montage permettant d'étudier la « charge » et la « décharge » d'un dipôle RL, utilisant entre autres un générateur idéal de tension.

2. Établir l'équation différentielle d'évolution de l'intensité. En déduire l'expression de la constante de temps. Comparer sa variation avec R au cas du dipôle RC.

3. Préciser quelle grandeur doit être continue et résoudre l'équation différentielle pour la charget et la décharge.

4. Tracer les allures des courbes correspondantes.

Indispensable

Indispensable

- déterminations des régimes asymptotiques avec les équivalents (interrupteurs ouverts ou fermés)
- forme générale de la solution du 1^er^ordre et sa courbe
- les interprétations énergétiques